Il percorso della LUCE
Dagli specchi ustori alle luci a led

Primo Brandi
Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Perugia
www.matematicaerealta@unipg.it

United Nations
Educational, Scientific and
Cultural Organization

International
Year of Light
2015

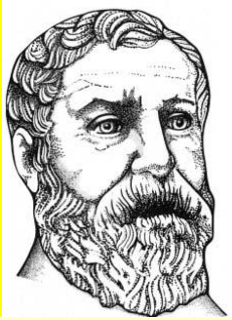
Fenomeno FISICO	Modello MATEMATICO
POSTULATO	PRINCIPIO
$\Downarrow$	$\Downarrow$
LEGGE	TEOREMA

I CASO: riflessione in un mezzo omogeneo

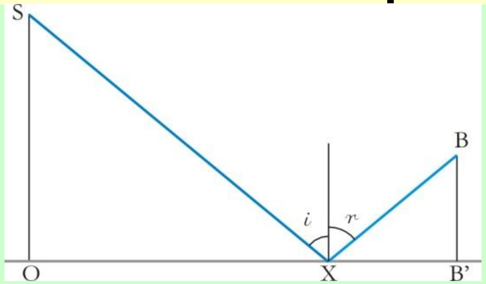
Principio di Erone I secolo a.C.

La luce percorre traiettorie di minima lunghezza

(geodetiche spaziali - shortest path)



Riflessione su specchi piani - notte dei tempi



angolo incidenza = angolo riflessione

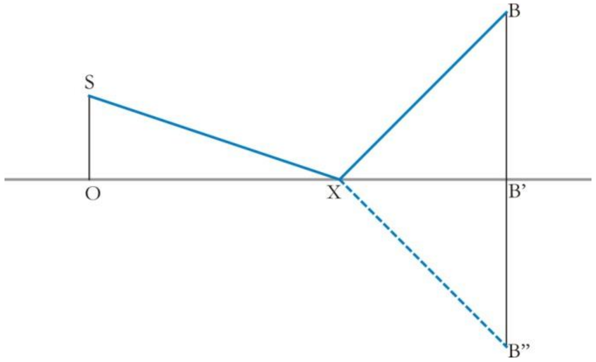
⇓ DIMOSTRAZIONE

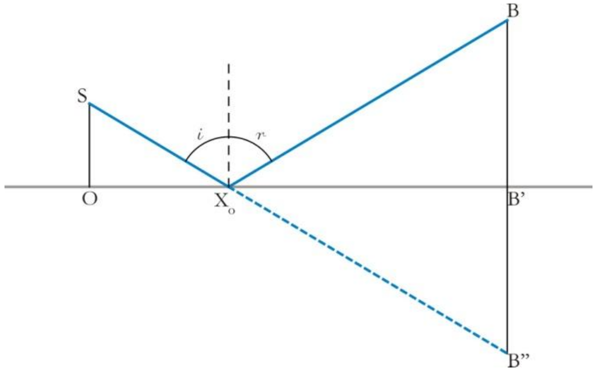
angolo incidenza = angolo riflessione

punto di riflessione

Conoscenze/competenze coinvolte

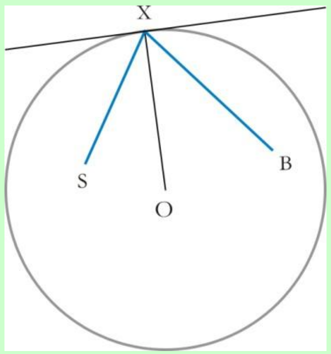
Geometria sintetica   Similitudine fra triangoli (rettangoli)





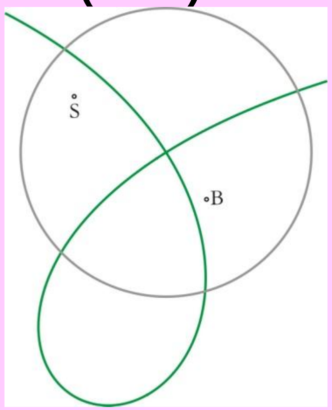
Riflessione su specchi sferici - Problema di Alhazen
(X secolo d.C.)
2 o 4 punti di riflessione

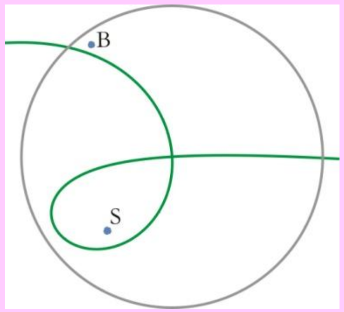
Leonardo: conferma sperimentale



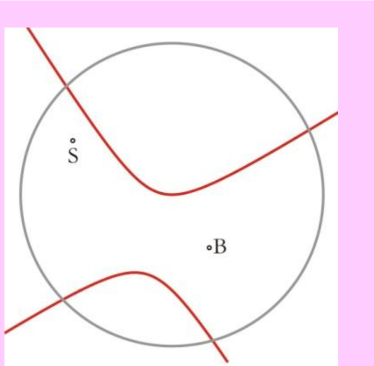
APPROCCIO GEOMETRICO

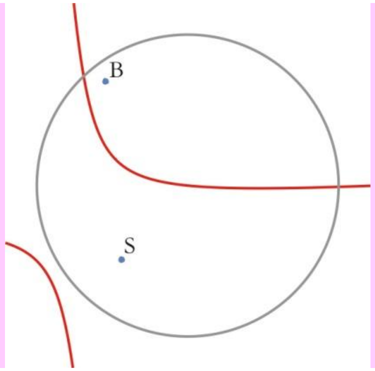
Alhazen *soluzione incompleta*
Isaac Barrow (1669)





Christian Huygens (1672)





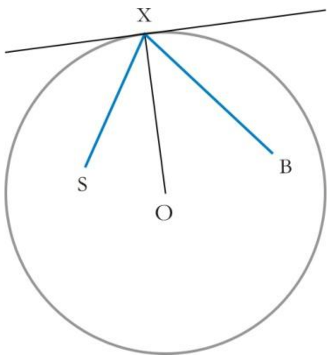
APPROCCIO ANALITICO

Esistenza, conta, localizzazione punti di riflessione

Conoscenze/competenze coinvolte

APPROCCIO GEOMETRICO luoghi geometrici (simulazione: software di geometria dinamica)

APPROCCIO ANALITICO: via Cartesiana

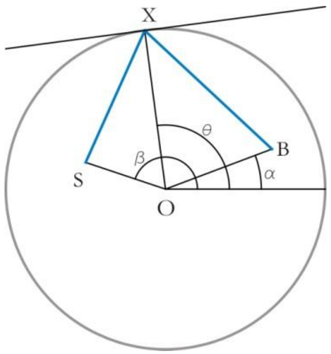


$$f(x,y) = \overline{SX} + \overline{XB} \qquad \min_{X \in \Gamma} f(x,y)$$

RICERCA DEI PUNTI STAZIONARI
(CN di Fermat) gradiente nullo

si ritrova sia il luogo di Barrow che l'iperbole di Huygens

APPROCCIO ANALITICO: via trigonometrica



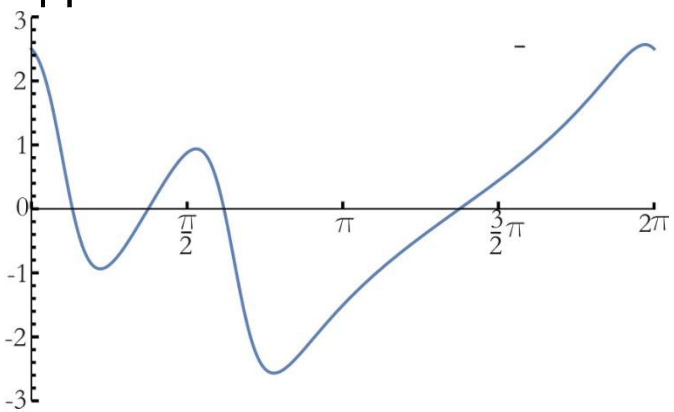
coordinate polari $g(\vartheta) \Rightarrow g'(\vartheta) = 0$

$\Downarrow$

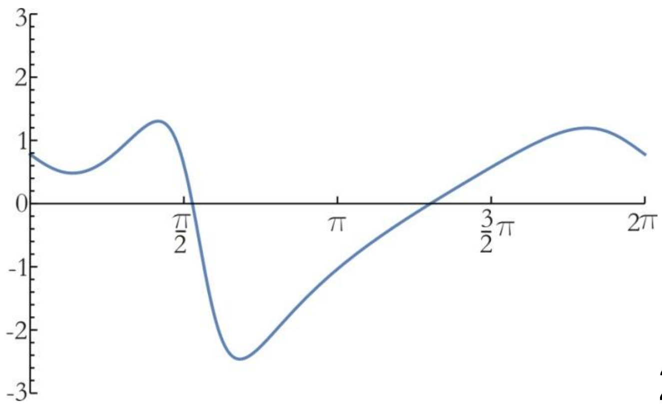
Equazione polinomiale di IV grado con parametro

(formula risolutiva) 2 o 4 soluzioni reali - **Punti di Alhazen**

Soluzioni approssimate mediante CAS



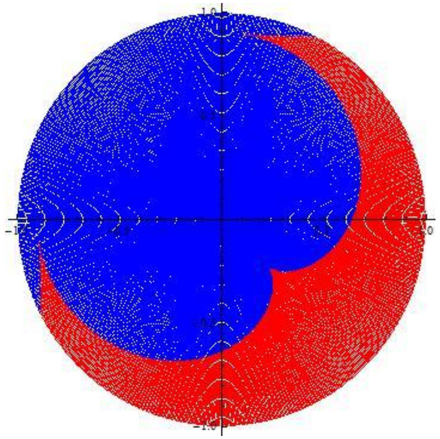
4 soluzioni



2

soluzioni

Spettro delle soluzioni



$$S = (\rho, \vartheta) = \left(0.9, \frac{11}{4}\pi\right)$$

APPLICAZIONI

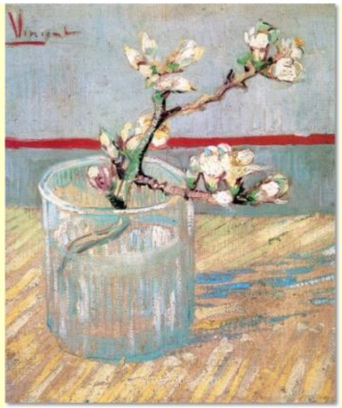
Specchi ustori

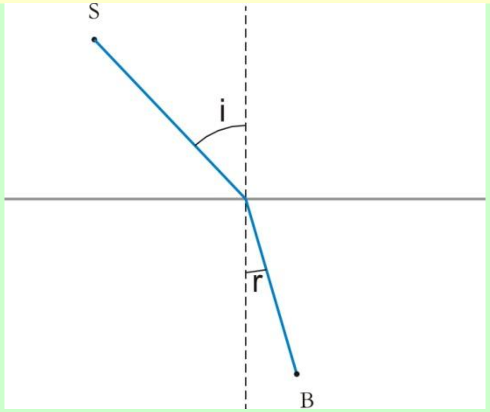
Fanali di automobile

Antenne paraboliche

Tunnel autostradali rivest. fonoassorbenti

II CASO: rifrazione fra due mezzi omogenei
Crisi modello di Erone
Ricerca nuovo principio





Legge di Snell $$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = const = ?$$

Lungo travaglio ....
Cartesio ....

Fermat .... principio di economia della natura

"bisogna interpretare le vie più corte come *le vie più facili, o più semplici, le vie di minor resistenza …*
breviori tempore percurri possint"

Nuovo paradigma

Principio di Fermat 1662

La luce percorre traiettorie di *minimo tempo*

(geodetiche temporali - quickest path)

Legge di Snell $\dfrac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = const = ?$

$\Downarrow$ DIMOSTRAZIONE

$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$

punto di rifrazione

Conoscenze/competenze coinvolte

APPROCCIO ANALITICO

$$f(x) = \frac{\overline{SX}}{v_1} + \frac{\overline{XB}}{v_2} \qquad \min_{X \in V} f(x)$$

$\Rightarrow$ RICERCA DEI PUNTI STAZIONARI

(CN di Fermat) $f'(x) = 0$

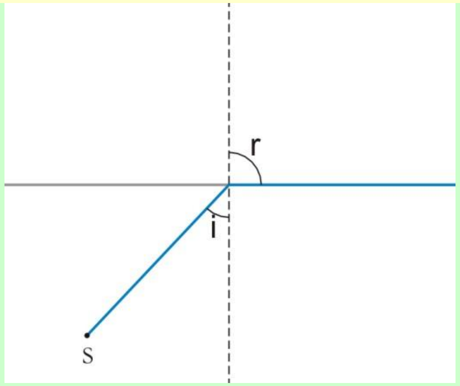
$\Downarrow$

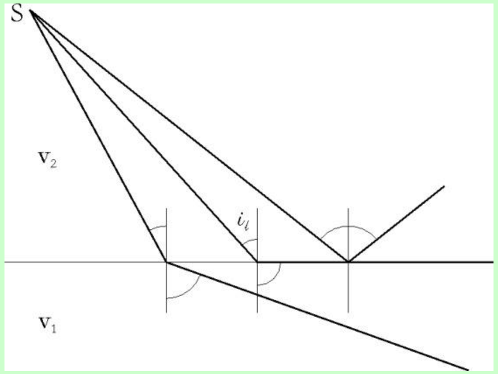
Equazione polinomiale di IV grado VINCOLATA

con parametri - 1 sola soluzione accettabile

Punto di Fermat

Riflessione totale





angolo limite sperimentale

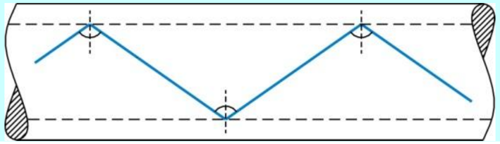
$\hat{i}$ angolo limite $\Leftrightarrow$ $\sin \hat{r} = 1$

APPLICAZIONI

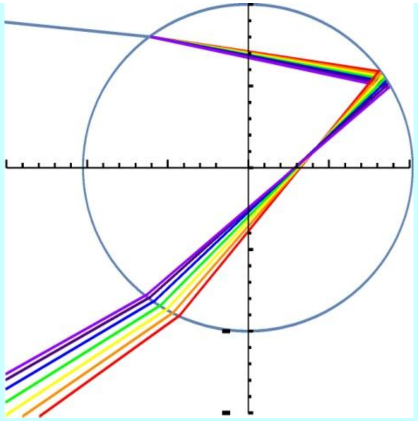
Arcobaleno

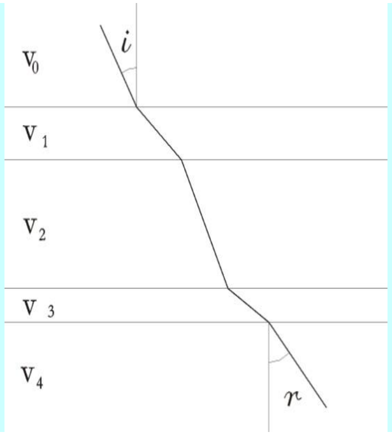
Prisma

Guida d'onda (fibra ottica)



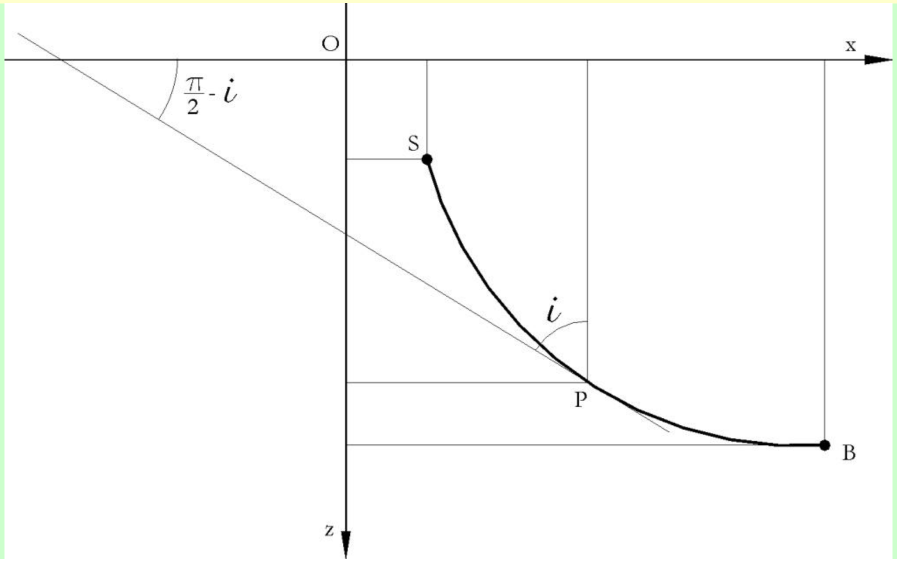
Lenti multistrato





III CASO: rifrazione in un mezzo a densità variabile

Principio di Fermat



⇓ DIMOSTRAZIONE

Problema di Calcolo della Variazioni
Minimo funzionale lunghezza con peso
Esistenza, unicità, localizzazione, calcolo

Legge di Huygens $\dfrac{\sin\hat{i}}{v(y)} = const$

in ogni punto della traiettoria $y(x)$

Conoscenze/competenze coinvolte

Calcolo differenziale

$\min\limits_{y} L(y) \quad \Rightarrow$ RICERCA DEI PUNTI STAZIONARI

(CN di Eulero-Lagrange) $\dfrac{\sin\hat{i}}{v(y)} = const$

Quattro casi particolari di notevole interesse

Semipiano di Poincaré XX secolo

$$v(y) = y$$

Brachistocrona di Bernoulli XVII secolo

$$v(y) = \sqrt{y}$$

Catenaria di Newton XVII secolo

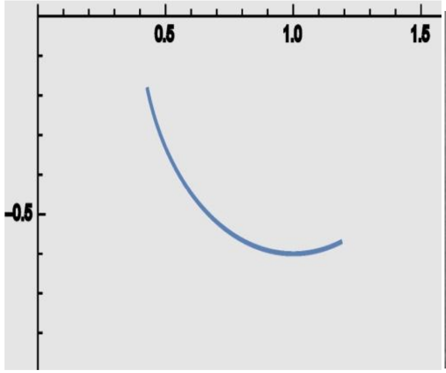
$$v(y) = \frac{1}{y}$$

Parabola di sicurezza

$$v(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Semipiano di Poincaré

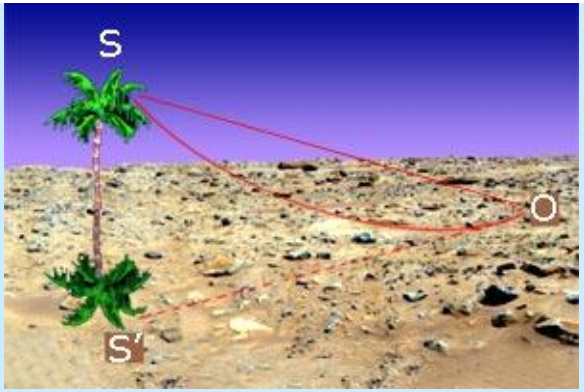
$$\frac{\sin \hat{i}}{y} = \frac{1/\sqrt{1+y'^2}}{y} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{ky}{\sqrt{1-k^2 y'^2}} dy = dx$$



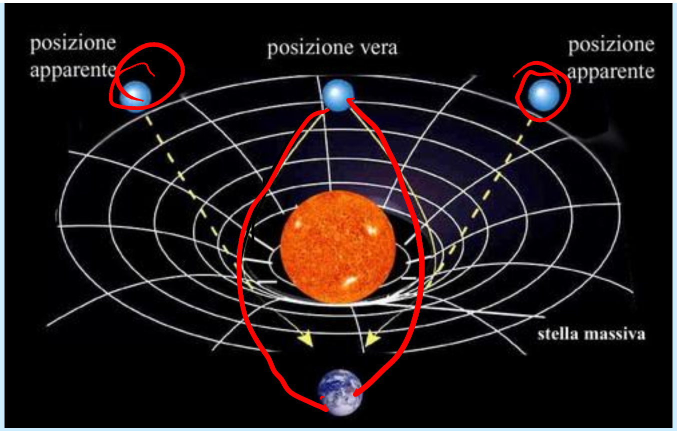
Archi di circonferenza con centro sull'orizzonte
Distanza logaritmica

APPLICAZIONI

Escher cerchio limite	Miraggio di terra/mare	Lente gravitazionale



S
O
S'



posizione apparente
posizione vera
posizione apparente
stella massiva

Problemi di navigazione e comunicazione

Cammini Shortest

Cammini Quickest

Internet